Li-Yorkeのカオスの観測不可能性(基研短期研究会「非線形力学系の基本問題」,研究会報告)

久保, 泉

Li－Yorkeのカオスの観測不可能性

久保　泉

広島大学総合科学部

1.　Li-Yorke のカオス

Li-Yorke の有名な論文「Period three implies chaos」が端緒となって，自然界の規則性の中に不規則な現象が内蔵されていることが注目を集め，数多くの例が発掘されカオス的現象として理解されるようになった。　いま再び，その原点に立ち帰って見よう。

彼らは，非常に単純な機構：区間 [0, 1] 上の連続変換 f を用いて，複雑な振舞いを取り出して見せた。f の n 回の iteration f^n を考え，もし f が３周期点をもてば，後に <u>scramble</u> <u>set</u> と呼ばれるようになった次の３性質(A)，(B)，(C)を持つ非可算濃度の集合 S が存在することを示した。d(･,･) を２点間の距離として，

(A)　任意の x，y∈S（≠）に対して，　$\limsup d(f^n(x), f^n(y)) > 0$

(B)　任意の x，y∈S（≠）に対して，　$\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$

(C)　任意の x∈S と周期点 p に対して，　$\limsup d(f^n(x), f^n(p)) > 0$

この集合 S のどの２点を取っても，iteration f^n によって非常に接近したり離れたりを繰り返し，またどの周期点にも巻き付かないという，古典的な２次元力学系の性質とは格段に異なっている軌道の複雑な振舞いをカオスと呼んだ。

複雑な振舞い→ゆらぎ→ランダム

の図式を思い浮かべて，多くの科学者が決定論的機構から確率論的現象が出現するものとして驚かされたようだ。

実はこのような考え方は決して新しいものではなく，近代物性理論の出発点とも言うべき統計力学の誕生のときに考察されていたことはよく知られている。クラジュウス，マックスウェル，ボルツマン等が１９世紀中ごろから，ニュートン力学の上に立った気体分子運動論を展開する際には，隠されたパラメターによる攪乱や揺動を導入することなく，ニュートン力学の支配する厳然たる決定論的機構が「統計」的考察を要求する「不規則」現象を生成しているものとして理解されていた。エルゴード仮説の数学的証明との関連で研究され，数学的にも単純な機構をもつものを含めて各種の現象が知られていた。

しかし特に，Li-Yorke の主張はカオスの発生するための要件の明快さのために多くの科学者を引き付け，ランダムな揺動が原因と思われていた身の回りの現象の中に，決定論的機構が主因となっている現象が新たに次々と見いだされ，またカオスの振舞いや発生機構が解明され自然の理解が一段と深くなった。

馬場良和・高橋陽一郎両教授との共同研究の結果であるこの報告では，ある意味で矛盾した面を持っている次の２つの主張をする。第一の主張は，Li-Yorke のカオスが観測不可能であることを，第二の主張は Li-Yorke のカオスが非常に一般的に存在することである。

2．観測可能性と不可能性

カオスの研究に纏わって，観測可能性の問題は次のように生じてきた。変換 f を一つの時間発展を記述するものと考え，なにかの物理量を表すψが時間発展とともにどの様に変化して行くか，特に時間平均がどうなるかは，変換 f の不変確率測度μが教えてくれる

バーコフの個別エルゴード定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \Sigma_{k=0}^{n-1}\ \psi(f^{k}(x)) = \overline{\psi}(x) \quad \text{a.e. } x\ \mu$$

ただし，$\overline{\psi}(x)$ は f-不変である。特にμがエルゴード的な場合には

$$\overline{\psi}(x) = \int \psi(x)\ d\mu(x)$$

が成り立つ（時間平均＝空間平均）。

註）μが不変測度とは$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ が成立すること，エルゴード的とは $f^{-1}(E) = E$ ならば，$\mu(E) = 0$ or 1 が成立することである。エルゴード的ならば，次に出て来る測度の台は厳密な定義に基づくものではなく，μ(D)＝1 となる集合 D のことで本質的に測度が乗っている集合の意味。

一般論で必ずこのような測度は存在するが，その一般論の範中ではμの台として特異なものが現れ得て，カントール集合のように大変薄い集合を台とする場合がある。カントール集合の構成の仕方は良く知られているように，[0, 1] 区間から中央の 1/3 の区間 (1/3, 2/3) を除外し次に残りの２区間からそれぞれの中央の 1/3 の区間を除外する。この手続きを無限に繰り返して得られる閉じた非可算集合がそれである。この手続きからすぐ分かる通り，一回ごとのの手続きで全体の長さの 1/3 の部分を除外して 2/3 が残される，従って全手続きで残る部分の全体に対する割合は

$$\lim\ (2/3)^{k} = 0$$

となる。この事実は物理的な計量の基本として受け入れている線分の長さに基づいて計測されたいわゆる<u>ルベーグ測度</u>で測ったときカントール集合の測度は０になることを意味している。現在考察している確率不変測度 μ に対しても同様なことが言え，μ で測って確率１で起こる事象であっても，自然界にもっともマッチしたルベーグ測度で測ると０になってしまう。

そこで我々の感覚のほうを重視して，観測可能性・不可能性の概念が登場した。ある現象が<u>観測可能</u>であるというのは，ルベーグ測度に<u>絶対連続な</u>（すなわちルベーグ測度に密度関数の重みをつけたものを許容する）測度で測って正の確率ならば観測可能と言い，ゼロならば観測不可能と言う。従って，不変確率測度 μ もルベーグ測度に絶対連続なときに観測可能な不変確率測度ど呼んでいる。

蛇足ではあるが，観測不可能な測度がいかに歪んだ計量に基づくか例で示しておこう。区間 [0, 1] を中央で左右に 1/2 づつに分ける。（本来 1/2 づつであるべきところだが）左側の測度を 1/3，右側の測度を 2/3 と与える。更に，各々の区間を中央で 1/2 づつに分け，左右の区間の測度を 1:2 づつに与える（４つの区間には左から 1/9, 2/9, 2/9, 4/9 づつの測度が与えられる）。以下これを繰り返して得られる測度が観測不可能な例になっている。実際にこの測度を確率不変測度にする変換 f は連続ではないが，区分的に連続な関数で与えられる。ここで

現れる計量の歪みは，非線形な座標系による歪みや相対論による空間の歪みに基づくのとは本質的に異なり，フラクタルな歪みであることは注目に値する。

さらに言えば，観測可能性はコンピュータ・シミュレーションを行うとき我々が選んだ初期値が非現実的な値ではなく，十分一般的な性質を反映している点を選んだ（もしくは選べる筈だ）と言う根拠を提供してくれるものと理解されている。もっとも計算機は有限システムだから完全に対応はしていないのであるが。

3. Li-Yorke のカオスの観測不可能性

Li-Yorke のカオスの実態は第１節でのべた通り scramble set S が担っている。この集合 S は観測可能であろうか？ この問題は実は，簡単な<u>テント変換</u>：

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leqq x \leqq 1/2 \\ 2-2x & \text{if } 1/2 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

に対しては J. Smital (1984) による結果があり，観測不可能である，すなわち $\mu(S)=0$。その理由を簡単に説明しておこう。まず全く一般論として

補題　1.　S を scramble set とすると：

1）　f(S) もまた scramble set である。

2）　f は S 上で 1:1 変換である。

がすぐ分かる。またこの変換の確率不変測度 μ はルベーグ測度そのものであることも明かであろう。　区間 $I_0 = [0, 1/2)$ と　区間 $I_1 = [1/2, 1]$ を考えると，各々の上で　f は勾配２の直線だから，

$$\mu(f(S \cap I_0)) = 2\mu(S \cap I_0)$$

$$\mu(f(S \cap I_1)) = 2\mu(S \cap I_1)$$

が成立する。一方補題１の（２）から

$$f(S \cap I_0) \cap f(S \cap I_1) = \phi$$

となり，

$$\begin{aligned} &\mu(f(S)) \\ &= \mu(f(S \cap I_0)) + \mu(f(S \cap I_1)) \quad ☆ \\ &= 2\mu(S \cap I_0) + 2\mu(S \cap I_1) \\ &= 2\mu(S) \end{aligned}$$

が成立する。　補題１の（１）により f(S) が再び scramble set になるから，

$$\mu(S) = 2^{-n}\mu(f^n(S)) \leqq 2^{-n}$$

が成立する。これから $\mu(S) = 0$ が分かる。

これで証明は完全に見えるが実は，測度論特有の嫌らしい問題点が残っている。それは，上の証明の中で測度の和に関する等式（☆）が成立するためには，集合 S が可測でなければならないと言う点である。与えられた集合 S にたいして S の<u>外測度</u> $m^*(S)$ とは，直感的に言えばS を外側から測った測度で，

$$m^*(S) = \inf_{S \subset \cup I_k} \Sigma_k |I_k|$$

により定義される，ただし I_k は小区間であり $|I_k|$ は区間の長さを表している。要するに　S を区間で外側から覆いその区間の長さの総和の最小値が外測度と呼ばれている。逆に<u>内測度</u>とは内側から測ったもので，

$$m_*(S) = 1 - m^*([0, 1] - S)$$

で与えられる。この二つの測度が一致するときS は可測集合と呼ばれ，ルベーグ測度が

$$m(S) = m_*(S) = m^*(S)$$

によって定義される（今は $m = \mu$）。現実の物理的世界においても長さの（従って面積や体積の）計量は上のようになされていると考えられる。

ここで再び自問しよう，scramble set S は可測であろうか？　世の中にそもそも非可測集合が存在するか否かは，あとでも触れるように，数学基礎論的問題が関わっており，我々が如何なる論理で数学を組立るかに懸かっている。通常の数学者が基礎に置いている公理系のもとでは非可測集合が存在し，実際に非可測な scramble set S が存在することも示せる。

講演者の個人的見解だが，非可測な S が観測可能と言うには，内測度が正のときが妥当と思う。何故ならば，そのときには高々可算個の小区間（長さの総和は1より小）で覆われる部分を除外したところから S の点を自由に選べるからである。何故外測度1でも観測可能と言い難いかを説明するため簡単な例を上げよう。正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ の部分集合 T が

$$T = \{(x, \psi(x));\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

の形で与えられるとするとき，値が $0 \leqq \psi(x) \leqq 1$ となる関数で T の外測度が1になるものが存在することが知られている（実はあとで述べる選出公理は必要）。この例では，各 x にたいし y 軸と平行な線分 $\{(x, y);\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ 上には T の点はたったの1点づつしか載っていない。そのような点をどんな偶然で我々が拾い上げれようか!

この観測不可能性の定義の下で，

定理1.　テント変換の scramble set は全て観測不可能である。

実はこの定理はもっと一般的で，1次元および多次元のカオスに対して：

定理2.　区間上の区分的に滑らかな変換 fがルベーグ測度に絶対連続な確率不変測度μをもつとき，集合 M_0, M_+, M_- を各々 Lyapunov 指数がゼロの点，正の点，負の点全体の集合とすると，$S \cap (M_+ \cup M_-)$ は観測不可能である。

定理3.　M を d 次元多様体（境界も許す）
f は M 上の区分的な可微分同型写像でリーマンヴォリュームに絶対連続な確率不変測度μを持つとする。集合 M_0, M_+, M_- をそれぞれ，全ての Lyapunov 指数が0，全ての Lyapunov 指数が非負で正のものが存在する，負の Lyapunov 指数が存在する点の集合とすると，$S \cap (M_+ \cup M_-)$ は観測不可能である。

一方良く知られているように，0 でない Lyapunov 指数の存在は Li-Yorke とは異なった意味において，カオス的様相の存在を示している。例えば，Lorenz系の strange atractor などはその顕著なものである。その他，Lyapunov 指数 0 を持たない保存系においては，Sinai のマルコフ分割のように，まさにランダム性を内臓している。定理2および定理3は，scramble set S が観測可能とすれば，その上では Lyapunov 指数が全てゼロになると言う，（別な意味では）全くカオス的でない言う奇妙な結果を意味している。

4．Li-Yorke のカオスの一般的存在定理

前節の結果により scramble set S は，内測度で測る限り（あるいは同値なことだが，可測な S のみ考える限り）観測不可能であることが分かった。それでは非可算濃度のものや外測度正（もっと強く外測度１）の scramble set S が存在するかどうか考察しよう。このような問題は数学基礎論に深く関わっているので，選出公理・連続体仮設の解説から始めよう。普通の数学者にとって，選出公理は当然として受け入れており，連続体仮説は認めるか否かにほとんど関心のない仮説である。実はこの連続体仮説は，ゲーデルによって，認めても認めなくても無矛盾であることが証明されている。

選出公理：空でない集合の集まりにおいて，その各集合から１つづつ要素を選び出せる。

連続体仮説：実数の濃度より小さい非可算濃度は存在しない。

注）ある抽象的な集合Ａが全順序集合であるとは，Ａの任意の要素 x，y に対してその大小関係が必ず決まる場合を言う。Ａの任意の部分集合が最小要素を持つときＡは整列集合であると言う。Ｂも全順序集合として，ＡとＢの間に順序を保つ１対１の対応があるときＡとＢとは同一の順序型をもつと言い，整列集合の順序型を順序数と言う。順序数の集合が整列集合になることが分かる。自然数と１対１の対応がある集合を濃度が可算であると言う。ある集合Ａと他の集合Ｂの間に１対１の写像があるときその二つの集合の濃度は同じであると言う。集合Ａの部分集合ＢがＡの濃度とは異なるとき，Ｂの濃度はＡの濃度より小であると言う。次の超限帰納法は定義から，整列定理は選出公理から示せる。

超限帰納法：整列集合Ａにおいて，「任意の要素 $\alpha \in$ Ａに対して，α より小さい全ての β である命題Ｐが成立するならば，α においてもＰが成立することが示せる」ならば「Ａの全ての要素 α でＰが成立する」。

整列定理（の特別な型）：与えられた集合Ａに対し，$\{\beta;\ \beta < \alpha\}$ の濃度がＡの濃度に一致するような順序数のうち最小の順序数 α が存在し，Ａの要素に対しＡ＝ $\{a(\beta);\beta < \alpha\}$ のように順序付けることが出来る。

ここでは，M を可分な距離空間（可算集合で稠密なものが存在する）とし，f は M 上の変換で不変な正則な確率測度 μ を持つとする。

定理４．　変換 f が弱混合性を持つとき，選出公理を認めれば，非可算濃度の scramble set S が存在する。

定理５．　f が弱混合性を持つとき，選出公理と連続体仮説の両者を認めれば外測度１の scramble set が存在する。

注）弱混合性とは，可測な集合 A，B にたいして，

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} \mu\,(f^{-n}(A)\cap B) = \mu\,(A)\,\mu\,(B)$$

が成立することである。念のため，弱混合性の必要十分条件を復習しておけば，点スペクトルを持たないことであり，弱混合性がどんなときに崩れるかを一言で言えば，$\{f^n\}$ のもとで周期的もしくは概周期的になるような量が何か存在することである。

従って，我々が少しでもカオス的であると思う様な系においては，定理４および定理５の結論が成立することになり，Li-Yorke のカオスは非常に一般的に現れることが分かる。

さて，何故基礎論と関わるかを理解して頂くために定理の証明の概略を述べよう。

補題２．　μ はアトムをもたないとし，空間 $M\times M$ の部分集合 A は直積測度 $\mu\times\mu$ で測って測度１（$\mu\times\mu(A)=1$）であるとする。D を $M\times M$ の対角線集合

$$D=\{(x,x);\ x\in M\}$$

とするとき，

１）選出公理を認めれば，M の非可算部分集合 S で $S\times S-D\subset A$ を満たすものが存在する。

２）更に連続体仮説を認めれば，M の部分集合 S で $S\times S-D\subset A$ を満たし，外測度１のものが存在する。

この補題が示されれば，定理の証明は容易である。まず，よく知られている弱混合ならば直積変換 $F(x,y)=(f(x),f(y))$ はエルゴード的になることを思いだそう。そうすれば殆どすべての組 (x,y) は，F^n をほどこすことにより対角線集合 D のどんな近傍をも無限回訪れるし，逆に対角線集合から離れた部分をも無限回訪れる。そのような組 (x,y) 全体の集合を A とすると，$\mu\times\mu(A)=1$ が成立する。このことは S が補題の１）もしくは２）のように取れれば scramble set になることを意味している。

さて補題の証明だが，空間 M，測度 μ にたいする定理の仮定のもとで，M の閉集合で μ 測度が正のもの全体の集合は連続体の濃度を持ち，それは整列定理のように $\{G(\alpha);\ \alpha<\Omega\}$ と順序付けられる。また Ω_0 を非可算濃度の順序数のうち最小のものとしておく A は対称と仮定して一般性を失わない。フビニの定理から，$A(x)=\{y;\ (x,y)\in A\}$，$B=\{x;\ \mu(A(x))=1\}$ とおくと，$\mu(B)=1$ が成立する。そこで $\alpha<\Omega_0$ を固定しておく。各 β（$<\alpha$）に対して $G(\beta)$ から１点づつ $x(\beta)$ を選んで

$$x(\beta)\in G(\beta)\cap B,\ (x(\gamma),x(\beta))\in A,$$
$$x(\gamma)\neq x(\beta),\quad \text{for } \gamma<\beta<\alpha$$

を充すように出来たと仮定しよう。α の濃度が可算だから

$$\mu\left(\bigcap_{\beta<\alpha}A(x(\beta))\right)=1$$

が成立し，$G(\alpha)\cap A\cap\left(\bigcap_{\beta<\alpha}A(x(\beta))-D\right)$ から $x(\alpha)$ を選ぶことが出来る。

超限帰納法により，全ての $\alpha<\Omega_0$ に対して $x(\alpha)$ を選べる。$S=\{x(\alpha);\alpha<\Omega_0\}$ が scramble set であることは明らであり，またその濃度は Ω_0 の濃度だから非可算濃度になる。

もし連続体仮説を認めると，$\Omega_0=\Omega$ となりすべての正測度の閉集合 $G(\alpha)$ は１点づつ集合 S と共通点をもつことになる。もし S の外測度が１より小さければ，測度 μ の正則性の仮定から S と交わらない正測度の閉集合 $G(\alpha)$ が存在することが分かるので，$x(\alpha)\in G(\alpha)\cap S=\phi$ となり矛盾が生じる。